**Вопросы по функциональному анализу и интегральным уравнениям**

**за 2020/2021 учебный год**

**(специальность ЭК, АМ и КБ)**

**Л**

**Глава 1. Банаховы пространства**

1. Метрические пространства. Способы задания расстояния. Прикладные задачи и способы задания метрики. (1-2)
2. Векторные пространства. Примеры. Базис и размерность. (2-3)
3. Нормированные векторные пространства. Примеры. Свойства нормы. Эквивалентные нормы. Теорема об эквивалентных нормах в конечномерных пространствах. (3-5)
4. Неравенства Гельдера, Юнга, Минковского. Пространство *CLp[a,b], ℓp*. *p≥1*. (5-7)
5. Открытые, замкнутые, ограниченные и выпуклые множества в нормированных векторных пространствах и их свойства. Примеры. (7-10)
6. Внутренние, внешние, граничные и предельные точки. Примеры. Теорема о замкнутом множестве. Всюду плотные и нигде не плотные множества.(10-11)
7. Предел последовательности в нормированном пространстве. Свойства предела. Теорема о точке прикосновения. (11-12)
8. Аппроксимация в нормированных пространствах. Теоремы о существовании и единственности элемента наилучшей аппроксимации. (12-13)
9. Банаховы пространства. Примеры. Принцип вложенных шаров. (13-14)
10. Ряды в банаховых пространствах. Критерий полноты пространства. (14о)
11. Пополнение нормированных векторных пространств (схема доказательства). (14о)
12. Отображения в нормированных пространствах. Теорема о непрерывном отображении, непрерывность композиции отображений. (14-16)

**Глава 3. Гильбертовы пространства и аппроксимация**

1. Предгильбертовы пространства. Свойства скалярного произведения. Примеры.(17-18)
2. Гильбертовы пространства. Примеры. Теорема об элементе наилучшей аппроксимации.(18-19)
3. Проекция в гильбертовом пространстве. Теорема о проекции. Ортогональное дополнение.(19-20)
4. Ортогональное разложение гильбертова пространства в прямую сумму. Теорема о плотном множестве.(20)
5. Ортогональные системы и ряды Фурье в гильбертовых пространствах. Теорема о разложении в ряд Фурье. Экстремальное свойство отрезка ряда Фурье.(21-22)
6. Полные ортонормированные системы в гильбертовом пространстве и их существование. Примеры полных ортонормированных систем в конкретных пространствах.(22-23)

**Глава 2. Принцип сжимающих отображений**

1. Сжимающие отображения. Теоремы о неподвижной точке сжимающего отображения. Локальный принцип сжимающих отображений.(16-17)
2. Применение принципа сжимающих отображений в линейной алгебре.(16о)
3. Применение принципа сжимающих отображений к интегральным уравнениям Фредгольма второго рода.(16о)
4. Применение принципа сжимающих отображений к интегральным уравнениям Вольтера второго рода.(16о-17о)

Р

**Глава 4. Линейные ограниченные операторы**

1. Линейные ограниченные операторы. Ограниченность и непрерывность. (1-2)
2. Примеры линейных ограниченных операторов. Ограниченность интегрального оператора в пространствах *C[a.b], Lp[a.b], p≥1.(2-4)*
3. Пространство линейных ограниченных операторов *В(X,Y)* и его полнота. Равномерная сходимость в пространстве *В(X,Y).* Примеры.(4-6)
4. Сильная сходимость в пространстве *В(X,Y).* Принцип равномерной ограниченности.(6-7)
5. Теорема Банаха-Штейнгауза и ее применение. (7о)
6. Обратные операторы. Непрерывная обратимость оператора и ее критерий. (7-8)
7. Левый и правый обратные операторы и разрешимость уравнения *Aх=y*. Теорема Банаха об обратном операторе (формулировка). (8-10)
8. Непрерывная обратимость оператора *I-A*.(10)
9. Применение теории обратных операторов к решению интегральных уравнений Фредгольма и Вольтера второго рода. Метод резольвент.(10-10о-11)

**Глава 5. Сопряженное пространство и сопряженные операторы**

1. Сопряженное пространство. Теорема Рисса об общем виде линейного ограниченного функционала в гильбертовом пространстве.(15-16)
2. Теорема Хана-Банаха о продолжении линейного ограниченного функционала.(16-17)
3. Следствия 1-5 из теоремы Хана-Банаха. (17-18)
4. Сопряженный оператор, его норма. Свойства операции сопряжения.(11-12)
5. Применение сопряженного оператора. Теорема о замыкании множества значений линейного ограниченного оператора (без доказательства).(12-13)
6. Самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве и их свойства.(13)
7. Норма самосопряженного оператора в гильбертовом пространстве. (13-14)
8. Собственные векторы и собственные значения самосопряженного оператора в гильбертовом пространстве.(18-19)

**Глава 6. Компактные множества и компактные операторы**

1. Компактные множества в банаховых пространствах. Критерий компактности Хаусдорфа.(19-20)
2. Предкомпактные множества в банаховых пространствах. Теорема Арцела-Асколи.(20-21)
3. Лемма о почти перпендикуляре. Критерий конечномерности нормированного пространства.(21-22)
4. Пространство компактных операторов. Примеры.(21о)
5. Теория Рисса – Шаудера разрешимости уравнений с компактным оператором. Первая, вторая и третья теоремы Фредгольма (формулировка).(21о-22о)
6. Собственные векторы и собственные значения компактного самосопряженного оператора в гильбертовом пространстве.(22о)